УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫМ ПРОЦЕССОМ В СТЕРЖНЕ С ТЕПЛООБМЕНОМ НА ОБОИХ КОНЦАХ

Д.С. Кузьменков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

OPTIMAL CONTROL PROBLEM OF A THERMAL PROCESS IN THE ROD WITH HEAT EXCHANGE ON BOTH ENDS

D.S. Kuzmenkov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Рассматривается задача оптимального управления тепловым процессом в стержне с помощью изменения температуры внешней среды на обоих его концах. Предлагается метод ее приближенного решения путем сведения к задаче оптимального управления специальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. Описывается алгоритм работы оптимального регулятора, формирующего в режиме реального времени текущие значения оптимальной обратной связи.

Ключевые слова: *тепловой процесс, задача оптимального управления, оптимальная обратная связь, оптимальный регулятор.*

An optimal control problem of a thermal process in the rod with heat exchange on both ends is considered. The method of its approximate solution by data to optimal control problem of large-scale differential equations system is offered. The algorithm of operation of the optimal regulator forming in real time current values of an optimal feedback is described.

Keywords: *thermal process, optimal control problem, optimal feedback, optimal regulator.*

Введение

Процессы и явления, поведение которых описывается уравнениями параболического типа, встречаются во многих приложениях [1]–[3], например, при изучении процессов диффузии и теплопроводности, они интенсивно исследуются и в настоящее время.

Основу современной теории оптимального управления составляют принцип максимума Понтрягина и динамическое программирование Беллмана. Эти фундаментальные результаты, первоначально разработанные для систем с сосредоточенными параметрами, позднее были обобщены на системы с распределенными параметрами [1], [2], [4], [5] .Исследовались, в основном, вопросы качественной теории оптимального управления. Намного меньше работ посвящено конструктивным методам решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами.

Задача синтеза оптимальных систем и в настоящее время является одной из сложнейших задач даже для обыкновенных систем, несмотря на применение принципа максимума и динамического программирования Беллмана. Исключение составляет только линейно-квадратичная задача Летова-Калмана, не содержащая геометрических ограничений на управляющие воздействия. В последнее время в различных научных работах развивается новый подход к проблеме синтеза оптимальных систем управления, ориентированный на принцип управления в реальном времени. Согласно этому принципу оптимальная обратная связь не строится, а ее необходимые для управления текущие значения вычисляются в процессе управления в режиме реального времени. Современная вычислительная техника и новые методы оптимизации позволяют реализовать принцип оптимального управления в реальном времени на практике для объектов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями достаточно высокого порядка.

В статье исследуется задача оптимального управления тепловым процессом в стержне с теплообменом на обоих концах. Цель данной работы: обосновать метод оптимального управления в реальном времени тепловым процессом в стержне с теплообменом на обоих концах. Эффективность описанного метода подтверждается вычислительными экспериментами.

1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления тепловым процессом в стержне с теплообменом на двух концах:

$$J(u_1,u_2)=\int_{t_*}^{t^*} c(t)(u_1(t)+u_2(t))dt \to \min,$$

$$x_t = a^2 x_{ss},\ (s,t)\in\Omega;$$

$$x_s(0,t)=\mu\left[u_1(t)-x(0,t)\right],$$

$$x_s(l,t)=\eta\left[u_2(t)-x(l,t)\right],\ t\in T; \qquad (1.1)$$

$$x(s,t_*)=x_0(s), s\in S;$$

$$g_* \le \int_0^l \left[x(s,t^*) - y(s) \right] \phi(s) ds \le g^*;$$

$$u_1(t) \in U_1, \;\; u_2(t) \in U_2, \;\; t \in T;$$

где t_*, $t^* > t_*$, $l > 0$, a^2, $\mu > 0$, $\eta > 0$, $u_*, u^* > 0$, – заданные константы; $\Omega = S \times T$, $S = [0,l]$, $T = [t_*, t^*]$; $c(t) > 0$, $c(t) \in R^2$, $t \in T$, $x_0(s) \in R$, $y(s) \in R$, $\phi(s) \in R^m$, $s \in S$, – непрерывные функции; $g_*, g^* \in R^m$ – заданные векторы; $x = x(s,t) \in R$ – температура в точке $s \in S$ в момент времени $t \in T$, $u_1 = u_1(t) \in R$, $u_2 = u_2(t) \in R$ – температура внешней среды в момент времени $t \in T$ на левом и правом концах стрежня соответственно;

$$U_1 = \{ u_1 \in R : u_* \le u_1 \le u^* \},$$
$$U_2 = \{ u_2 \in R : u_* \le u_2 \le u^* \}.$$

***Определение* 1.1.** Функцию

$$u_1(\cdot) = \left(u_1(t), t \in T \right)$$

назовем *дискретной* (с периодом квантования h_t), если $u_1(t) \equiv u_1(\tau)$, $t \in [\tau, \tau + h_t[$, $\tau \in T_h = \{ t_*, t_* + h_t, \ldots, t^* - h_t \}$, $h_t = (t^* - t_*)/N$, N – натуральное число.

Задачу (1.1) будем рассматривать в классе дискретных управляющих воздействий $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$.

***Определение* 1.2.** Дискретные управляющие воздействия $u_1(\cdot)$ называются *доступными*, если они удовлетворяют включению $u_1(t) \in U_1$, $t \in T$.

Аппроксимируя уравнение объекта управления методом прямых [6], заменим задачу (1.1) на следующую задачу оптимального управления:

$$J(u_1,u_2) = \int_{t_*}^{t^*} c(t)(u_1(t) + u_2(t)) dt \to \min, \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} x_t(s_1,t) = \bar{a}^2 [x(s_2,t) - (1 - h_s\mu) x(s_1,t)] - \\ \quad - h_s \bar{a}^2 \mu u_1(t), \\ x_t(s_i,t) = \bar{a}^2 \left[x(s_{i-1},t) - 2x(s_i,t) + x(s_{i+1},t) \right], \\ \quad i = \overline{2,n-1}; \\ x_t(s_n,t) = \bar{a}^2 \left[x(s_{n-1},t) - (1 + h_s\eta) x(s_n,t) \right] + \\ \quad + h_s \bar{a}^2 \eta \, u_2(t), \\ x(s_i,t_*) = x_0(s_i), i = \overline{1,n}; \end{cases} \quad (1.3)$$

$$g_* \le \sum_{i=1}^n [x(s_i,t^*) - y(s_i)] \varphi(s_i) \le g^*; \quad (1.4)$$

$$u_1(t) \in U_1, \;\; u_2(t) \in U_2, \;\; t \in T; \quad (1.5)$$

где $h_s = l/(n-1)$, n – натуральное число;

$$\bar{a}^2 = a^2 / h_s^2; \;\; s_i = ih_s, \;\; \varphi(s_i) \in R^m, \;\; i = \overline{1,n};$$
$$\varphi(s_i) = h_s \phi(s_i), \;\; i = \overline{2,n-1}, \;\; \varphi(s_1) = h_s \phi(s_1)/2,$$
$$\varphi(s_n) = h_s \phi(s_n)/2.$$

***Определение* 1.3.** Доступное управляющее воздействие $u(\cdot) = (u_1(\cdot), u_2(\cdot))$ назовем *программой*, если соответствующая ему траектория $x(t,\cdot) = (x(t,s_i), \; i = \overline{1,n})$, $t \in T$, в момент времени t^* удовлетворяет ограничениям (1.4). Траекторию $x(t,\cdot)$, $t \in T$, соответствующую программе, назовем *допустимой траекторией*.

***Определение* 1.4.** Программа $u^0(t)$, $t \in T$, называется *оптимальной программой*, если $J(u^0) = J(u_1^0, u_2^0) = \min_{u_1,u_2} J(u_1,u_2)$. Соответствующую ей траекторию $x^0(t)$, $t \in T$, будем называть *оптимальной траекторией*.

2 Основные элементы двойственного метода

Запишем решение уравнения (1.3) по формуле Коши

$$x(s_i,t) = \sum_{i=1}^n f(s_i,t;s_j,t_*) x_0(s_j) + \\ + \int_{t_*}^t f(s_i,t;s_1,\tau)(-h_s \bar{a}^2 \mu) u_1(\tau) d\tau + \quad (2.1) \\ + \int_{t_*}^t f(s_i,t;s_n,\tau) h_s \bar{a}^2 \eta u_2(\tau) d\tau, \;\; i = \overline{1,n}, \;\; t,\tau \in T,$$

в которой $f(s_i,t;s_j,\tau) = f_{ij}(t,\tau)$, $t,\tau \in T$, $i,j = \overline{1,n}$, – элементы фундаментальной матрицы решений системы (1.3), которая удовлетворяет следующим соотношениям:

$$F(t,t_*) = F(t) F^{-1}(t_*), \;\; F(t) \in R^{n \times n}:$$
$$\dot{F} = AF, \;\; F(t_*) = E,$$

где E – единичная матрица,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} =$$

$$= \bar{a}^2 \begin{pmatrix} h_s\mu - 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -(1 + h_s\eta) \end{pmatrix}.$$

В классе дискретных управляющих воздействий формула Коши (2.1) примет вид

$$x(s_i,t) = \sum_{j=1}^n f(s_i,t;s_j,t_*) x_0(s_j) + \\ + \sum_{\tau=t_*}^{t-h_t} f_{u_1}(s_i,t;s_1,\tau) u_1(\tau) + \quad (2.2) \\ + \sum_{\tau=t_*}^{t-h_t} f_{u_2}(s_i,t;s_n,\tau) u_2(\tau), \;\; i = \overline{1,n}, \;\; t,\tau \in T_h,$$

где $f_{u_1}(s_i,t;s_1,\tau)=-h_s\overline{a}^2\mu\int\limits_{\tau}^{\tau+h_t}f(s_i,t;s_1,\xi)d\xi,$

$$f_{u_2}(s_i,t;s_n,\tau)=h_s\overline{a}^2\eta\int\limits_{\tau}^{\tau+h_t}f(s_i,t;s_n,\xi)d\xi.$$

Подставив (2.2) в (1.4), мы получим

$$g_{*k}\le\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\sum_{j=1}^{n}f(s_i,t^*;s_j,t_*)x_0(s_j)+ +\sum_{\tau=t_*}^{t^*-h_t}f_{u_1}(s_i,t^*;s_1,t)u_1(t)+ +\sum_{\tau=t_*}^{t^*-h_t}f_{u_2}(s_i,t^*;s_n,t)u_2(t)-y(s_i)\Bigg]\varphi_k(s_i)\le g_k^*$$

или

$$g_{*k}\le\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}f(s_i,t^*;s_j,t_*)x_0(s_j)-y(s_i)\right]\varphi_k(s_i)+ +\sum_{i=1}^{n}\sum_{\tau=t_*}^{t^*-h_t}f_{u_1}(s_i,t^*;s_1,t)u_1(t)\varphi_k(s_i)+ \qquad (2.3)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\tau=t_*}^{t^*-h_t}f_{u_2}(s_i,t^*;s_n,t)u_2(t)\varphi_k(s_i)\le g_k^*,\quad k=\overline{1,m}.$$

Изменив порядок суммирования в (2.3), придем к функциональной форме задачи (1.2)–(1.5)

$$J(u_1,u_2)=\int\limits_{t_*}^{t^*}c(t)(u_1(t)+u_2(t))dt\to\min;$$

$$g_{*k}\le\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}f(s_i,t^*;s_j,t_*)x_0(s_j)-y(s_i)\right]\varphi_k(s_i)+ \sum_{\tau=t_*}^{t^*-h_t}\sum_{i=1}^{n}f_{u_1}(s_i,t^*;s_1,t)u_1(t)\varphi_k(s_i)+ +\sum_{\tau=t_*}^{t^*-h_t}\sum_{i=1}^{n}f_{u_2}(s_i,t^*;s_n,t)u_2(t)\varphi_k(s_i)\le g_k^*,\qquad (2.4)$$

$$k=\overline{1,m},\ u_1(t)\in U_1,u_2(t)\in U_2,\ t\in T_h.$$

Введем обозначения

$$\tilde g_{*k}=g_{*k}-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}f(s_i,t^*;s_j,t_*)x_0(s_j)-y(s_i)\right]\varphi_k(s_i),$$

$$\tilde g_k^*=g_k^*-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}f(s_i,t^*;s_j,t_*)x_0(s_j)-y(s_i)\right]\varphi_k(s_i),$$

$$c_h(t)=\int\limits_{t}^{t+h_t}c(\tau)d\tau,$$

$$d_{h_1}(t)=\sum_{i=1}^{n}f_{u_1}(s_i,t^*;s_1,t)\varphi_k(s_i),\qquad (2.5)$$

$$d_{h_2}(t)=\sum_{i=1}^{n}f_{u_2}(s_i,t^*;s_n,t)\varphi_k(s_i),\quad t\in T_h,\quad k=\overline{1,m}.$$

В новых обозначениях задача (2.4) будет иметь вид

$$J(u_1,u_2)=\sum_{t\in T_h}c_h(t)(u_1(t)+u_2(t))\to\min;$$

$$\tilde g_*\le\sum_{t\in T_h}(d_{h_1}(t)u_1(t)+d_{h_2}(t)u_2(t))\le g^*;\qquad (2.6)$$

$$u_1(t)\in U_1,u_2(t)\in U_2,\ t\in T_h.$$

Обозначив $d_h(t)=(d_{h1}(t),d_{h2}(t)),$ $u(t)\in R^2=(u_1(t),u_2(t)),\ U=\{u\in R^2:u_*\le u\le u^*\},$ задачу (2.6) можно записать в виде

$$J(u)=\sum_{t\in T_h}c_h(t)u(t)\to\min,$$

$$\tilde g_*\le\sum_{t\in T_h}d_h(t)u(t)\le\tilde g^*,\ u(t)\in U,\ t\in T_h.\quad (2.7)$$

Приведем необходимые понятия адаптивного метода линейного программирования.

Пусть $I=\{1,2,\dots,m\}$, $J=\{1,2\}$, $Q=T_h\times J$, $I_{on}\subset I$, $Q_{on}\subset Q,$, $|Q_{on}|=|I_{on}|$. Составим матрицу

$$D_{on}=\begin{pmatrix}(d_{h_ji}(t)),\{t,j\}\in Q_{on}\\ i\in I_{on}\end{pmatrix}.$$

***Определение* 2.1.** Пару $K_{on}=\{I_{on},Q_{on}\}$ назовем *опорой* задачи (1.2)–(1.5), если $\det D_{on}\ne0$. При $I_{on}=\varnothing$, $Q_{on}=\varnothing$, пара K_{on} – пустая опора, по определению. Совокупность $\{u(\cdot),K_{on}\}$ из программы $u(\cdot)$ и опоры K_{on} будем называть *опорной программой*.

***Определение* 2.2.** Опорная программа $\{u(\cdot),K_{on}\}$ называется *прямо невырожденной*, если выполняются следующие соотношения

$$u_*<u_j(t)<u^*,\{t,j\}\in Q_{on},$$

$$g_{*i}<z_i<g_i^*,i\in I_н=I\setminus I_{on},$$

где $z_i=\sum_{j=1}^{n}[x(s_j,t^*)-y(s_j)]\varphi_i(s_j),\ i\in I.$

Опорную программу $\{u(\cdot),K_{on}\}$ сопровождают следующие элементы:

1. *Допустимая траектория* $x(t)$, $t\in T$, системы (1.2)–(1.5).

2. *Выходной сигнал* $z=(z_i,i\in I)$.

3. *Вектор потенциалов* $\nu=\nu(I)=(\nu_{on},\nu_н)$, который строится по следующим правилам: $\nu_н=(\nu_i,i\in I_н)=0$, $\nu_{on}=(\nu_i,i\in I_{on})$ – решение векторного уравнения

$$\nu'_{on}D_{on}=c'_{on},$$

где $c_{оп}=c(Q_{on})=\left(c_{hj}(t),\{t,j\}\in Q_{on}\right)$. В случае пустой опоры полагаем $\nu=0$.

4. *Копрограмма* $\delta_{h1}(t),\ \delta_{h2}(t),\ t\in T_h,$

$$\delta_{hj}(t)=0,\ \{t,j\}\in Q_{on};$$

$$\delta_{hj}(t)=c'_н-\nu'_{on}D^н_{on},\quad\{t,j\}\in Q_н,$$

где $c_н=c(Q_н)=\left(c_{hj}(t),\{t,j\}\in Q_н\right),$

$$D^н_{on}=D(I_{on},Q_н)=\begin{pmatrix}d_{h_ji}(t),&\{t,j\}\in Q_н\\ i\in I_{on}\end{pmatrix}.$$

Пару $\{t, j\} \in Q_н$ будем называть *неопорным нулем* первой копрограммы, если $\delta_{hj}(t-h_t)\delta_{hj}(t) < 0;$ обозначим через $Q_{н0}$ множество неопорных нулей копрограммы.

***Определение* 2.3.** Опору будем называть *регулярной*, если сопровождающие ее элементы удовлетворяют соотношениям: $\nu_i \neq 0, \quad i \in I_{оп};$ $\delta_{hj}(t) \neq 0, \quad \{t, j\} \in Q_н; \quad \delta_{hj}(t-h_t) \times \delta_{hj}(t+h_t) < 0,$ $\{t, j\} \in Q_{оп}; \quad \delta_{hj}(t) \times \delta_{hj}(t+h_t) > 0, \quad \{t, j\} \in Q_{н0};$ $\delta_{hj}(t_*) \neq 0, \ \delta_{hj}(t^*-h_t) \neq 0, \ j \in J_{оп}, \ J_{оп} \subset J.$

5. – 6. *Псевдопрограмма* $\omega_j(t), \ \{t, j\} \in Q$ и *выходной псевдосигнал* ζ.

Сначала зададим неопорные значения псевдопрограммы:

$$\omega_j(t) = u_*, \text{ если } \delta_{h_j}(t) < 0;$$
$$\omega_j(t) = u^*, \text{ если } \delta_{hj}(t) > 0;$$
$$\omega_j(t) \in [u_*, u^*], \text{ если } \delta_{hj}(t) = 0; \ \{t, j\} \in Q_н.$$

Затем определим опорные значения выходного псевдосигнала $\zeta_{оп} = \zeta(I_{оп}) = (\zeta_i, i \in I_{оп}):$

$$\zeta_i = g_{*i}, \text{ если } \nu_i < 0;$$
$$\zeta_i = g_i^*, \text{ если } \nu_i > 0;$$
$$\zeta_i \in [g_{*i}, g_i^*], \text{ если } \nu_i = 0; \ i \in I_{оп}.$$

Опорные значения псевдопрограммы найдем из равенства:

$$\zeta_{оп} = D_{оп}\omega_{оп} + p_{оп},$$

где $\omega_{оп} = \omega(Q_{оп}) = (\omega_j(t), \{t, j\} \in Q_{оп}),$

$$p = p(I) = (p_{оп} = (p_i, i \in I_{оп}), p_н = (p_i, i \in I_н)),$$
$$p = \sum_{\{t,j\} \in Q_н} d_{hj}(t)\omega_j(t).$$

Если опора $K_{оп}$ – пустая, то $\omega_{оп} = 0.$

Неопорные значения $\zeta_н = \zeta(I_н) = (\zeta_i, i \in I_н)$ выходного псевдосигнала определим по формуле:

$$\zeta_н = D(I_н, Q_{оп})\omega_{оп} + p_н,$$

где $D(I_н, Q_{оп}) = \begin{pmatrix} d_{h_j i}(t), & \{t, j\} \in Q_{оп} \\ i \in I_н & \end{pmatrix}.$

7. *Псевдотраектория* $æ(t), \ t \in T,$ сопровождающая опору $K_{оп}$ – решение уравнения (1.2)–(1.5) с управляющим воздействием $u(t) = \omega(t),$ $t \in T.$

Величину $\beta(u(\cdot), K_{оп}) = c' æ(t^*) - c'x(t^*)$ будем называть *оценкой субоптимальности* опорной программы.

Двойственный метод [7] построения программного решения задачи (1.2)–(1.5) является итеративным. Он начинается с произвольной опоры $K_{оп}^1$ и заканчивается построением оптимальной опоры $K_{оп}^0$. Итерация представляет замену «старой» опоры $K_{оп}$ на «новую» $\bar{K}_{оп}$, при которой выполняется соотношение $\beta(\bar{u}(\cdot), \bar{K}_{оп}) \leq \beta(u(\cdot), K_{оп}).$

К началу каждой итерации сохраняем в памяти ЭВМ следующую информацию: 1) $u(\cdot);$ 2) $K_{оп};$ 3) $Q_{н0};$ 4) $\nu_{оп};$ 5) $D(I, Q_{оп});$ 6) $D_{оп}^{-1};$ 7) $\tilde{F}(t), \ t \in T_{оп} \cup T_{н0};$ 8) p; 9) ζ; 10) z, которая преобразовывается на итерациях метода.

Основные выкладки итераций двойственного метода, используемого для решения задач типа (2.7) в данной статье не приводятся, с ними можно ознакомиться в [7, 8]. Двойственный метод, на итерациях которого преобразуется информация 1)–10), конечен, если на его итерациях встречаются только регулярные опоры [7].

Для предлагаемого в статье метода оптимального управления в реальном времени для больших значений *n* решающую роль играет быстрое вычисление значений функций (2.5). Это позволяет сделать процедура квазидекомпозиции фундаментальной матрицы решений системы (1.3). Квазидекомпозиция осуществляется аналогично [8], [9]. Она позволяет интегрирование системы порядка *n* заменить на параллельное интегрирование *r* систем значительно меньшего порядка *m*.

3 Алгоритм работы оптимального регулятора

Для определения позиционного решения задачи (1.2)–(1.5) (оптимального управления типа обратной связи) погрузим ее в семейство задач

$$J(u) = \int_{\tau}^{t^*} c(t)(u_1(t) + u_2(t))dt \to \min;$$

$$\begin{cases} x_t(s_1, t) = \bar{a}^2[x(s_2, t) - (1 - h_s\mu)x(s_1, t)] - \\ \qquad -h_s\bar{a}^2\mu u_1(t), \\ x_t(s_i, t) = \bar{a}^2\left[x(s_{i-1}, t) - 2x(s_i, t) + x(s_{i+1}, t)\right], \\ \qquad i = \overline{2, n-1}; \\ x_t(s_n, t) = \bar{a}^2\left[x(s_{n-1}, t) - (1 + h_s\eta)x(s_n, t)\right] + \\ \qquad +h_s\bar{a}^2\eta\, u_2(t), \\ x(s_i, \tau) = \chi(s_i), i = \overline{1, n}; \end{cases} \tag{3.1}$$

$$g_* \leq \sum_{i=1}^{n}[x(s_i, t^*) - y(s_i)]\varphi(s_i) \leq g^*;$$

$$u_1(t) \in U_1, \ u_2(t) \in U_2, \ t \in T(\tau) = [\tau, t^*],$$

зависящих от позиции $(\tau, \chi(\cdot)),$ где $\tau \in T_h,$ $\chi(\cdot) = \left(\chi(s_i) \in R, i = \overline{1, n}\right)$ – непрерывная функция.

Пусть

$$u^0(t \,|\, \tau, \chi(\cdot)) = \left(u_1^0(t \,|\, \tau, \chi(\cdot)), u_2^0(t \,|\, \tau, \chi(\cdot))\right),$$

$t \in T(\tau),$ – оптимальная программа задачи (3.1) для позиции $(\tau, \chi(\cdot)),$ X_τ – множество всех состояний $\chi(\cdot)$, для которых существует оптимальная программа.

***Определение* 3.1.** Функционал

$$u^0(\tau,\chi(\cdot)) = u^0\left(\tau \mid \tau,\chi(\cdot)\right),\ \chi(\cdot)\in X_\tau,\ \tau\in T_h, \quad (3.2)$$

называется *оптимальной (дискретной) обратной связью по состоянию системы* (*позиционным решением задачи* (1.2)–(1.5)).

Построение оптимальной обратной связи (3.2) в явной форме или синтез оптимальных систем в классической постановке представляет собой довольно сложную задачу, которая не решена до сих пор для систем (1.3). В статье используется другой подход к синтезу оптимальных систем – оптимальное управление в реальном времени [10]. Опишем метод оптимального управления нагревом стержня с теплообменом на двух концах в реальном времени.

Оптимальная обратная связь (3.2) определена по математической модели (1.3), но предназначена для управления реальной системой. Замкнем ее оптимальной обратной связью и запишем поведение замкнутой системы в точках $s_i,\ i=\overline{1,n}$:

$$\begin{cases} x_t(s_1,t) = \bar{a}^2\left[x(s_2,t)-(1-h_s\mu)x(s_1,t)\right]- \\ \quad -h_s\bar{a}^2\mu u_1^0(t)+w, \\ x_t(s_i,t) = \bar{a}^2\left[x(s_{i-1},t)-2x(s_i,t)+x(s_{i+1},t)\right]+ \\ \quad +w,\ i=\overline{2,n-1}, \\ x_t(s_n,t) = \bar{a}^2\left[x(s_{n-1},t)-(1+h_s\eta)x(s_n,t)\right]+ \\ \quad +h_s\bar{a}^2\eta\, u_2^0(t,x(t))+w, \\ x(s_i,t_*) = x_0(s_i),\ i=\overline{1,n}, \end{cases} \quad (3.3)$$

где $u_j^0(t,x(t)) = u_j^0(\tau,x(\tau)),\quad j=1,2,\quad t\in\left[\tau,\tau+h_t\right[$, $\tau\in T_h$; w – совокупность членов, отражающих неточности математического моделирования, неточность реализации оптимальной обратной связи и возмущение, действующее на физический объект в процессе управления. В дальнейшем для краткости будем w называть возмущением.

Предположим, что в процессе управления возмущения реализуются в виде кусочно-непрерывной функции $w^*(t),\ t\in T$. Они порождают траекторию $x^*(s_i,t),\ i=\overline{1,n},\quad t\in T$, удовлетворяющую тождеству

$$\begin{cases} x_t^*(s_1,t) = \bar{a}^2\left[x^*(s_2,t)-(1-h_s\mu)x^*(s_1,t)\right]- \\ \quad -h_s\bar{a}^2\mu u_1^0(t,x^*(t))+w^*(t), \\ x_t^*(s_i,t) = \bar{a}^2\left[x^*(s_{i-1},t)-2x^*(s_i,t)+x^*(s_{i+1},t)\right]+ \\ \quad +w^*(t),\ i=\overline{2,n-1}, \\ x_t^*(s_n,t) = \bar{a}^2\left[x^*(s_{n-1},t)-(1+h_s\eta)x^*(s_n,t)\right]+ \\ \quad +h_s\bar{a}^2\eta\, u_2^0(t,x^*(t))+w^*(t), \\ x^*(s_i,t_*) = x_0(s_i),\ i=\overline{1,n}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Из (3.4) следует, что в конкретном процессе управления оптимальная обратная связь (3.2) не используется полностью, нужны только ее значения

$$u^*(t) \equiv u^0(t,x^*(t,\cdot)) = u^0(\tau,x^*(\tau,\cdot)),$$
$$t\in[\tau,\tau+h_t[,\quad \tau\in T_h, \quad (3.5)$$

вдоль одной траектории $x^*(s_i,t),\ i=\overline{1,n},\ t\in T$.

***Определение* 3.2.** Функцию (3.5) назовем *реализацией оптимальной обратной связи* (3.2) в конкретном процессе управления.

Согласно принципу управления в реальном времени [10] оптимальная обратная связь (3.2) не строится, а текущие значения $u^*(\tau),\quad \tau\in T_h$, ее реализации вычисляются в процессе управления за время, не превосходящее h_t, т. е. в режиме реального времени.

***Определение* 3.3.** Устройство, способное вычислять значения $u^*(\tau),\quad \tau\in T_h$, в режиме реального времени, назовем *оптимальным регулятором.*

Перед началом процесса управления оптимальный регулятор, используя двойственный метод [7], строит оптимальную опору $K_{on}^0(t_*) = \{I_{on}^0(t_*),Q_{on}^0(t_*)\}$ и оптимальную программу $u^0(t\mid t_*,x_0(\cdot)),\quad t\in T_h$, задачи (1.2)–(1.5) для начальной позиции $(t_*,x_0(\cdot))$, сохраняет текущую информацию для момента времени t_*:

$$K_{on}^0(t_*);\ Q_{н0}^0(t_*);\ \nu_{on}(t_*);$$
$$D(I,Q_{on}^0\mid t_*);\ D_{on}^{-1}(t_*);$$
$$\tilde{f}(t),\ t\in T_{on}^0(t_*)\cup T_{н0}^0(t_*);\ p(t_*);$$
$$\omega_j(t\mid t_*),\ \{t,j\}\in Q_{on}^0;\ \zeta(t_*).$$

С началом процесса управления оптимальный регулятор подает на вход объекта (3.3) управляющее воздействие

$$u^*(t) \equiv u^*(t_*) = u^0(t_*\mid t_*,x_0(\cdot)),$$
$$t\in[t_*,\ t_*+h_t+\vartheta(t_*+h_t)[.$$

Здесь $\vartheta(\tau),\quad \tau\in T_h$, – время, затрачиваемое на вычисление значения $u^*(\tau)$ реализации оптимальной обратной связи (3.5).

Пусть процесс управления уже проведен на промежутке $[t_*,\tau[$. Оптимальный регулятор уже выработал управляющие воздействия $u^*(t_*)$, $u^*(t_*+h_t),\ \ldots,u^*(\tau-h_t)$. Под действием этих управляющих воздействий и возмущения $w^*(t)$, $t\in[t_*,\tau[$, физический объект оказался в состоянии $x^*(\tau,\cdot)$, которое становится известным оптимальному регулятору. В предыдущий момент $\tau-h_t$ оптимальный регулятор для отыскания значения $u^*(\tau-h_t)$ решил задачу (3.1) для позиции $(\tau-h_t,x^*(\tau-h_t))$ и запомнил ее оптимальную опору $K^0_{on}(\tau-h_t)$. Функциональная форма этой задачи примет вид

$$J(u)=\sum_{t\in T_h(\tau-h_t)} c_h(t)u(t)\to\min,$$

$$g_*(\tau-h_t)\le\sum_{t\in T_h(\tau-h_t)} d_h(t)u(t)\le g^*(\tau-h_t), \quad (3.6)$$

$$u(t)\in U,\ t\in T_h(\tau-h_t)=(\tau-h_t,\tau,\ldots,t^*-h_t),$$

где

$$g_*(\tau-h_t)=g_*-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} f(s_i,t^*;s_j,\tau-h_t)x^*(s_j,\tau-h_t)-y(s_i)\right)\varphi(s_i),$$
$$g^*(\tau-h_t)=g^*-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} f(s_i,t^*;s_j,\tau-h_t)x^*(s_j,\tau-h_t)-y(s_i)\right)\varphi(s_i).$$

В результате решения задачи (3.6) к моменту τ была получена и сохранена следующая информация:

$$K^0_{on}(\tau-h_t);\ Q^0_{н0}(\tau-h_t);\ \nu_{on}(\tau-h_t);$$
$$D(I,Q^0_{on}\mid\tau-h_t);\ D^{-1}_{on}(\tau-h_t);$$
$$\tilde f(\tau-h_t),\ t\in T^0_{on}(\tau-h_t)\cup T^0_{н0}(\tau-h_t);$$
$$p(\tau-h_t);\ \omega_j(t\mid\tau-h_t),\ \{t,j\}\in Q^0_{on};\ \zeta(\tau-h_t).$$

Для того, чтобы построить текущее значение $u^*(\tau)$ реализации оптимальной обратной связи для позиции $(\tau,x^*(\tau))$, оптимальный регулятор на промежутке $[\tau,\tau+h_t[$ должен решить задачу

$$J(u)=\sum_{t\in T_h(\tau)} c_h(t)u(t)\to\min,$$

$$g_*(\tau)\le\sum_{t\in T_h(\tau)} d_h(t)u(t)\le g^*(\tau), \quad (3.7)$$

$$u(t)\in U,\ \ t\in T_h(\tau),$$

где

$$g_*(\tau)=g_*-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} f(s_i,t^*;s_j,\tau)x^*(s_j,\tau)-y(s_i)\right)\varphi(s_i),$$
$$g^*(\tau)=g^*-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} f(s_i,t^*;s_j,\tau)x^*(s_j,\tau)-y(s_i)\right)\varphi(s_i).$$

Для решения задачи (3.7) оптимальный регулятор находит значения псевдопрограммы в опорные моменты времени

$$\omega_{on}(\tau)=D^{-1}_{on}(\tau-h_t)\left(\zeta_{on}(\tau-h_t)-p_{on}(\tau)\right)$$

и неопорные значения выходного псевдосигнала

$$\zeta_н(\tau)=D(I_н,Q^0_{on}\mid\tau-h_t)\omega_{on}(\tau)+p_н(\tau).$$

При выполнении неравенств $|\omega_j(t\mid\tau)|\le u^*$, $\{t,j\}\in Q^0_{on}(\tau)$; $g_{*i}\le\zeta_i(\tau)\le g^*_i$, $i\in I_н(\tau)$, согласно критерию оптимальности [7] оптимальная опора задачи (3.6) является оптимальной и в задаче (3.7): $K^0_{on}(\tau)=K^0_{on}(\tau-h_t)$. Иначе осуществим итерации двойственного метода [7], выбрав в качестве начальной опоры $K^1_{on}(\tau)$ оптимальную опору $K^0_{on}(\tau-h_t)$. При этом будет преобразована текущая информация:

$$D(I,Q^0_{on}\mid\tau)=D(I,Q^0_{on}\mid\tau-h_t);$$
$$D^{-1}_{on}(\tau)=D^{-1}_{on}(\tau-h_t);$$
$$\nu_{on}(\tau)=\nu_{on}(\tau-h_t);$$
$$p(\tau)=p(\tau-h_t)-D(\tau-h_t)u^*(\tau-h_t);$$
$$\zeta_{on}(\tau)=\zeta_{on}(\tau-h_t).$$

Если $\{\tau,j\}\notin Q^0_{н0}(\tau-h_t)$, то $Q^0_{н0}(\tau)=Q^0_{н0}(\tau-h_t)$; если $\{\tau,j\}\in Q^0_{н0}(\tau-h_t)$, то

$$Q^0_{н0}(\tau)=Q^0_{н0}(\tau-h_t)\setminus\{\tau,j\}.$$

Построив оптимальную опору $K^0_{on}(\tau)$ задачи (3.7), оптимальный регулятор подает на вход системы (3.3) управляющие воздействие

$$u^*(t)=u^*(\tau)=u^0(\tau\mid\tau,\xi^*(\tau)),$$
$$t\in[\tau+\vartheta(\tau),\tau+h_t+\vartheta(\tau+h_t)[.$$

Для использования опоры $K^0_{on}(\tau)$ с $\tau\in T^0_{on}(\tau)$ в качестве начальной в момент времени $\tau+h_t$, необходимо провести одну дополнительную операцию двойственного метода с $t_0=\tau$, $\alpha^1=0$. В случае регулярной опоры $K^0_{on}(\tau)$ для выхода момента τ из опоры будет достаточно одного короткого шага.

Заключение

В статье рассматривается задача оптимального управления тепловым процессом в стержне с теплообменом на обоих концах и предлагается современный метод ее решения. Метод основан на динамической реализации двойственного метода [7] и процедуре квазидекомпозиции [9], что позволяет быстро строить текущие значения оптимальной обратной связи. Полученные результаты могут быть обобщены на другие задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоров, А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. – М.: Наука, 1978. – 468 с.

2. *Лионс, Ж.Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.Л. Лионс. – М. : Мир, 1972. – 414 с.

3. *Kowalewski, A.* Optimal control of distributed parabolic systems with multiple time delays given in the integral form / Adam Kowalewski // J. Math. Contr. and Inf. – 2005. – Vol. 22, № 2. – P. 149–170.

4. *Бутковский, А.Г.* Методы оптимального управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский. – М. : Наука, 1975. – 568 с.

5. *Васильев, Ф.П.* Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления / Ф.П. Васильев, А.З. Ишмухаметов, М.М. Потапов. – М. : Изд-во МГУ, 1989. – 143 с.

6. *Крылов, В.И.* Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. – Мн. : Наука и техника, 1986. – 311 с.

7. *Габасов, Р.* Конструктивные методы оптимизации : в 5 ч. / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, А.И. Тятюшкин. – Минск : Университетское, 1984–1998. – Ч. 1 : Линейные задачи. – 1984. – 213 с.

8. *Габасов, Р.* Оптимальное управление тепловым процессом / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Д.С. Кузьменков // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 1. – С. 5–9.

9. *Кузьменков, Д.С.* Распараллеливание вычислений при оптимальном управлении нагревом стержня / Д.С. Кузьменков // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2008. – № 5 (50), ч. 1. – С. 61–64.

10. *Габасов, Р.* Принципы оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 15–18.

Поступила в редакцию 06.02.12.